

## Capítulo XXI

### Ondas de choque

#### 1. Introducción

El propósito de este capítulo es, fundamentalmente, estudiar las ondas de choque no tanto como un problema típico, y de hecho clásico de la dinámica de fluidos, sino como el de un fenómeno que, desde el punto de vista termohidrodinámico, está fuera de los alcances de la termodinámica irreversible lineal. Las ondas de choque como un fenómeno perturbativo (en general no lineal) característico de fluidos viscosos, está ampliamente discutido en la literatura [1]-[7]. Aquí vamos a comenzar por una discusión muy simple del problema usando esencialmente la primera ley de la termostática para después pasar a la descripción de los perfiles de ondas de choque unidimensionales desde el punto de vista de la hidrodinámica y la teoría cinética de los gases.

Consideremos un tubo (figura 21.1) en el cual un pistón se mueve con celeridad constante  $v$  en un gas originalmente en equilibrio a presión  $p_0$ , temperatura  $T_0$  y densidad  $\rho_0$ . El pistón produce una discontinuidad en el gas cambiando su estado de manera que las variables tomen valores  $T$ ,  $p$  y  $\rho$ , respectivamente. Cuando se alcanza un estado estacionario, el gas que está a la derecha del pistón está en equilibrio con éste,

luego  $p$  es la misma que la del pistón. El gas a la izquierda del pistón se mueve a la misma celeridad que éste y lejos del pistón el gas estacionario tendrá un estado descrito por  $p_0$ ,  $T_0$  y  $\rho_0$  respectivamente.

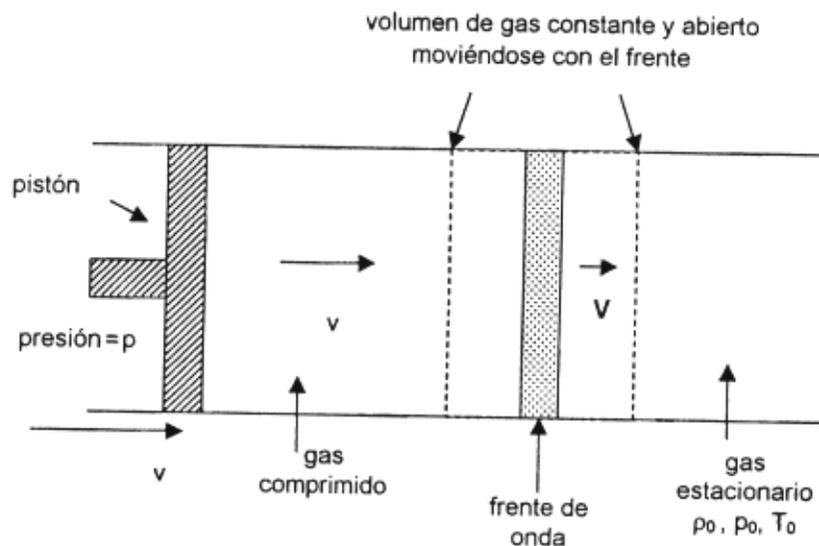


Figura 21.1 Esquema pictórico describiendo las características de una onda de choque.

Tomamos ahora como sistema termodinámico uno abierto formado por el gas a la izquierda y derecha del pistón que produce una perturbación que se propaga con una celeridad  $V$ . Vamos a utilizar las ecuaciones de conservación para determinar las propiedades del gas antes y después de la perturbación. Si  $A$  es la sección transversal del tubo, la cantidad de gas que entra al elemento es  $\rho_0 V A$  y el gas sale del sistema con una rapidez igual a  $\rho(V - v)A$  luego

$$\rho_0 V = \rho(V - v) = g \quad (21.1)$$

es la ecuación de conservación de la masa donde  $g$  es el flujo de masa. Como la fuerza neta actuando sobre el gas es  $p - p_0$  y la rapidez de cambio del ímpetu es  $gv$  tenemos que

$$gv = p - p_0 \quad (21.2)$$

y finalmente si  $\epsilon_0$  es la energía interna por unidad de masa antes del choque y  $\epsilon$  después, el cambio a  $t_0$  en la energía por unidad de masa es

$$\Delta\epsilon = \epsilon + \frac{1}{2}v^2 - \epsilon_0$$

donde  $1/2 v^2$  es la energía cinética del gas moviéndose con el frente. Si suponemos que la rapidez con que pasa el choque por el gas es suficientemente grande para que no haya intercambio de calor, el fenómeno es adiabático, y la primera ley requiere que  $W = p v A$  sea igual a  $\Delta\epsilon g A$ , luego

$$p v = \left( \frac{v^2}{2} + \epsilon - \epsilon_0 \right) g \quad (21.3)$$

por unidad de tiempo. Las ecs. (21.1)-(21.3) conjuntamente con las ecuaciones de estado y energía describen completamente las características del movimiento perturbado (choque). Así por ejemplo, eliminando  $v$  de (21.1) y (21.2) se tiene que

$$V^2 = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{p - p_0}{\rho - \rho_0} \quad (21.4)$$

Para choques débiles  $\rho/\rho_0 \sim 1$  y

$$V^2 \approx \left( \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \right)_{ad} = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s$$

que es la velocidad del sonido. También, usando las ecuaciones. (21.2) y (21.3) se tiene que

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \frac{(p + p_0)}{p - p_0} v^2 \quad (21.5)$$

que para choques fuertes,  $p \gg p_0$  implica que el cambio en la energía interna es igual a la energía cinética del movimiento del fluido. Combinando (21.4) y (21.5) se tiene que

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{2} (p + p_0) (v_0 - v) \quad (21.6a)$$

donde  $v = \rho^{-1}$  es el volumen específico. Si introducimos la entalpía  $h = \varepsilon + pv$

$$h - h_0 = \frac{1}{2} (p - p_0) (v_0 + v) \quad (21.6b)$$

Las ecs. (21.6a) o (21.6b) se conocen como las ecuaciones de Rankine-Hugoniot para una onda de choque. Si el gas en el cual ocurre la perturbación es ideal, se pueden obtener resultados muy específicos para las características del sistema después de la perturbación pero reservaremos los detalles para los ejercicios al final del capítulo.

Es evidente que los resultados anteriores son útiles si sólo interesa conocer los efectos "asintóticos" de la perturbación, esto es, la forma en que las variables termodinámicas antes y después del choque están relacionadas entre sí. Pero si queremos profundizar en conocer la "estructura misma" de la

onda de choque, esto es, cómo se comportan  $\rho$  y  $v$  digamos dentro del gas perturbado, es necesario recurrir a las ecuaciones diferenciales de la hidrodinámica planteadas en el capítulo II, así como un conjunto de ecuaciones constitutivas, que hasta hoy ha sido uno de los problemas más controvertidos, para poder integrar las ecuaciones y comparar, ya sea con el experimento, que hay pocos, o con "modelos" numéricos tan comunes hoy en día.

Por razones estrictamente didácticas, vamos a repasar brevemente los antecedentes más sobresalientes en el estudio de las ondas de choque en los últimos sesenta años. Para una secuencia histórica el lector puede consultar el artículo clásico de H. Grad escrito en 1952 [8]. Después de este trabajo, que de hecho fue una de las razones por la cual Grad desarrolló su método de los momentos para resolver la ecuación de Boltzmann, y que ya discutimos en el capítulo XIII, había en la literatura tres grandes directrices para estudiar perfiles de ondas de choque. Este perfil se define como la forma detallada, digamos  $u(x)$ , de cualquier variable de estado ( $\rho(x)$ ,  $T(x)$ ,  $p(x)$ , etc. del fluido, que varía con la posición en una perturbación (onda) que se desplaza en la dirección del eje  $x$ . La primera se basa en la solución de las ecuaciones hidrodinámicas para un cierto conjunto de ecuaciones constitutivas. Lo más importante de este esfuerzo es que hacia fines de los años setenta, se pensaba que las ecuaciones de Navier-Stokes sólo eran válidas para números de Mach  $\sim 1.81$ , donde el número de Mach  $M$  se define como el cociente entre la velocidad de la onda  $V$  y la velocidad del sonido en el fluido; que las ecuaciones de Burnett sólo mejoraban los resultados de Navier-Stokes en el intervalo de Mach's donde estas son válidas [8]-[12] y que las ecuaciones de super-Burnett no poseen soluciones estables [12]. Estos resultados se apoyaban fuertemente en el resultado obtenido por Holway en 1964 [9]

y que recientemente se mostró, es incorrecto [13]. Volveremos a este punto más adelante.

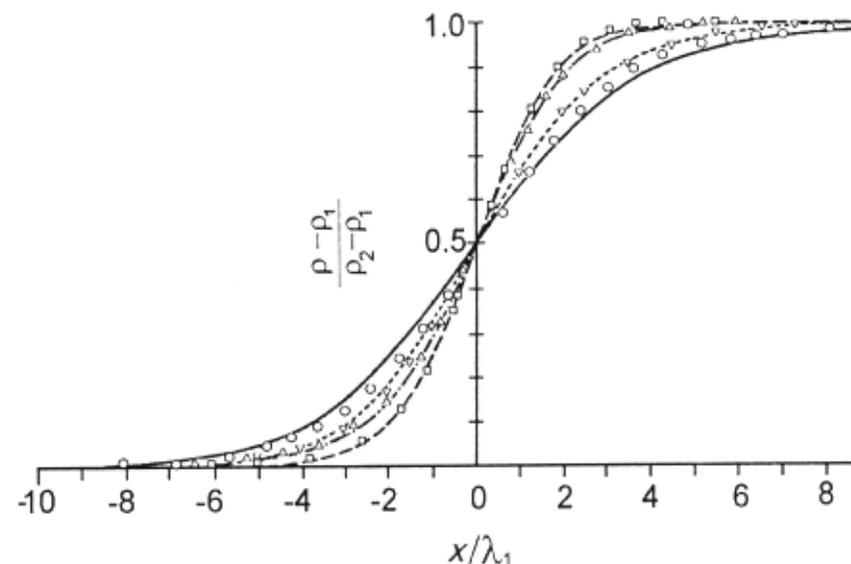
La segunda directriz se basó en la solución de la ecuación de Boltzmann para un gas diluido por el método de los momentos [8]. En su trabajo, Grad llegó a la conclusión de que sus ecuaciones para 13 momentos y moléculas maxwellianas ( $\phi(r) \sim r^{-5}$ ) no tienen solución para números de Mach del orden de 1.61. Como ya dijimos, en 1964 Holway afirmó que la solución no existe para este conjunto de ecuaciones, independientemente de cuántos términos se incluyan en el desarrollo en polinomios de Hermite para  $M \sim 1.85$ . Esto plantea una paradoja hasta hoy no resuelta, a saber por qué las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes que son deducibles del método de los 13 momentos tienen solución para Mach's grandes en tanto que las ecuaciones linealizadas de Grad no la tienen. Volveremos a este punto más adelante. Sin embargo, hace unos años Weiss [13] rebatió la demostración de Holway; en efecto veremos cómo para un sistema bien definido, la solución sí existe. Sin embargo, aun para gases diluidos la comparación con el experimento y con simulaciones numéricas no es muy satisfactoria al nivel de Navier-Stokes.

La tercera directriz contiene una mezcla de métodos "ad hoc" que se han diseñado para calcular perfiles de ondas de choque que incluyen desde modelos un tanto sofisticados de la ecuación de Boltzmann, incluyendo soluciones a ésta por diversos métodos numéricos, hasta las simulaciones y soluciones por computadoras puestas de moda a partir de 1980 por Hoover *et al.* [14]-[15] y extendidos recientemente por Mareschal y Solomons conjuntamente con el grupo de Hoover [16] para calcular perfiles de onda hasta Mach's del orden de 134.

De todo este trabajo, la situación general hasta 1979 está muy bien expuesta en el artículo de Alsmeyer [17] que

tomaremos como referencia esencial en lo que sigue. El trabajo contiene los resultados experimentales de medidas muy precisas para perfiles de la densidad  $\rho(x)$  obtenidos en el intervalo  $1.55 \leq M \leq 9$  para  $Ar$  y  $N_2$ . Dado que en el segundo sistema aparece la complicación proveniente de los grados de libertad internos, nos limitaremos aquí a discutir el caso del  $Ar$ . Los resultados más relevantes están mostrados en las figuras 21.2 a 21.4.

Los métodos teóricos usados para comparar son el cálculo numérico de Bird, hoy muy mejorado y perfeccionado [18], basado en una simulación de Monte Carlo, y que como puede verse, da resultados muy razonables para todo el intervalo de Mach's si la ley de repulsión intermolecular  $\phi(r) \sim r^{-v}$  se toma con  $v = 10$  que corresponde a una viscosidad cortante  $\eta \sim T^\omega$  con  $\omega = 0.72$  que parece ser razonable.



**Figura 21.2** Perfil de densidades para números de Mach de 1.55(O), 1.75( $\nabla$ ), 3.8( $\square$ ) y 9.0( $\Delta$ ), comparados con el experimento (—), (-----), (—) y (.-.-), respectivamente. Los cálculos están hechos con el método de Monte Carlo.

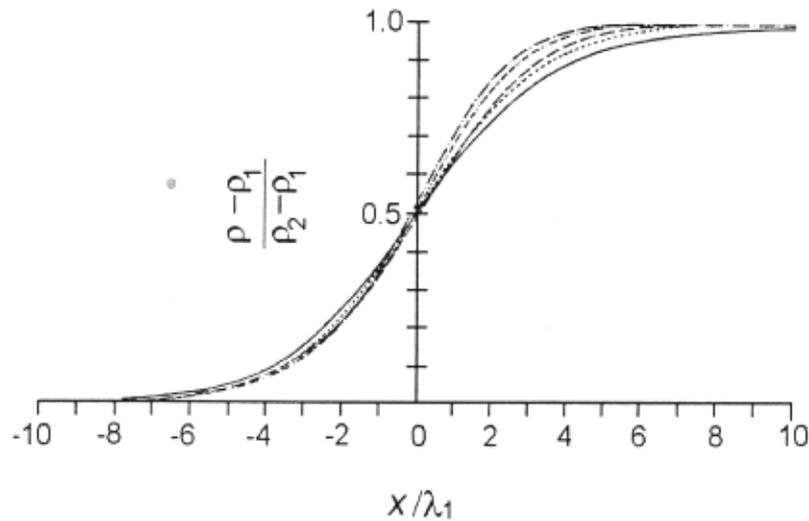


Figura 21.3 Igual que la figura anterior excepto que los cálculos teóricos fueron hechos por el método de Mott-Smith.

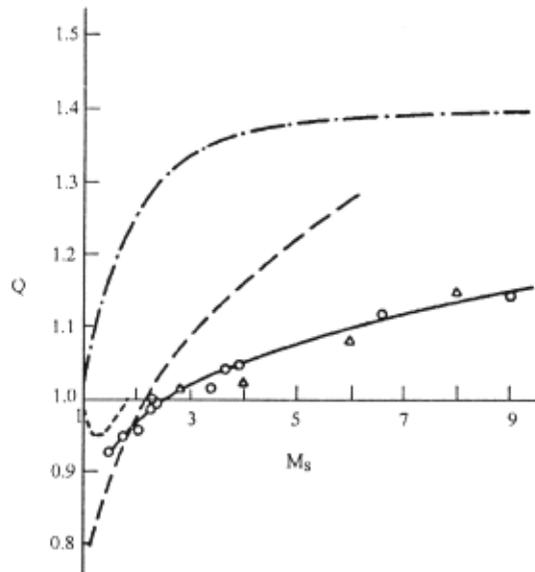


Figura 21.4 El factor de asimetría de los perfiles de densidad de la teoría y el experimento. (—) Navier-Stokes (viscosidad empírica); (-----) Burnett (esferas suaves); (---) (Hicks); (—) experimento; (Δ) Schmidt; (O) Alsmeyer.

Otros modelos como el de Mott-Smith basado en una hipótesis completamente arbitraria (distribución bimodal) [19] y la solución de Monte Carlo a la ecuación de Boltzmann propuesta por Hicks [20] no las discutiremos aquí.

Desde el enfoque macroscópico, las figuras 21.2 y 21.3 contienen la comparación con las ecuaciones de Navier-Stokes y Burnett usando diferentes valores de  $\omega$  en la ecuación para la viscosidad  $\omega = 0.5, 1$  y  $0.72$ , esto es, esferas duras, moléculas maxwellianas y moléculas realistas, respectivamente. La figura 21.3 muestra claramente la aseveración anterior, la aproximación de Burnett para moléculas maxwellianas mejora la de Navier-Stokes si  $M < 1.85$  y la figura 21.4 exhibe la misma conclusión cuando se grafica la asimetría del perfil de densidades definido como

$$Q = \frac{\int_{-\infty}^0 \rho_n(x) dx}{\int_0^{\infty} (1 - \rho_n(x)) dx}$$

donde  $\rho_n(x) = \rho(x) - \rho_1 / \rho_1 - \rho_2$ , 1 y 2 siendo dos puntos lejanos antes de y después del frente de onda de choque. Es, pues, claro de este análisis que la mejor concordancia entre los experimentos disponibles hasta 1976 y la teoría es a través de modelos numéricos.

## 2. Desarrollos recientes

Una vez que se han estudiado con detalle las ecuaciones de la hidrodinámica, el planteamiento de las ecuaciones fundamentales para una onda de choque unidimensional que se propaga, digamos en la dirección  $x$ , y que ha alcanzado su estado constante (*steady*) es relativamente sencillo. En efecto las tres ecuaciones de conservación son:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (21.7a)$$

para la masa;

$$\frac{d}{dx}(\rho u^2 + p + \tau_{xx}) = 0 \quad (21.7b)$$

para el ímpetu y

$$\frac{d}{dx} \left[ \rho u \left( \varepsilon + \frac{1}{2} u^2 \right) + u(p + \tau_{xx}) + q_x \right] = 0 \quad (21.7c)$$

para la energía, donde para escribirlas en esta forma se ha usado (21.7a). Por completez,  $\rho$  es la densidad de masa,  $\vec{u} = u(x)\hat{i}$  la velocidad de la dirección  $x$ ,  $p$  la presión,  $\varepsilon$  la energía interna,  $\tau_{xx}$  la componente  $x$  del tensor de los esfuerzos y  $q_x$  la componente  $x$  del flujo de calor. Para hacer de este sistema de ecuaciones uno cerrado, son necesarias dos ecuaciones constitutivas para  $\tau_{xx}$  y para  $q_x$  y dos ecuaciones de estado  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$  y  $p = p(\rho, T)$  si queremos eliminar  $\varepsilon$  de la ec. (21.7c). Con ello y las condiciones iniciales (aquí no hay condición a la frontera) el sistema es cerrado y en principio soluble. Más aún, como ya vimos en el capítulo x, las ecs. (21.7a-b) también se obtienen de la ecuación de Boltzmann cuya solución genera, además, las ecuaciones constitutivas así como los valores teóricos de la viscosidad y la conductividad térmica en términos de los parámetros moleculares. De esta manera, el cálculo de los perfiles de onda de choque  $\rho(x)$ ,  $T(x)$  y  $u(x)$  puede intentarse para un fluido arbitrario usando ecuaciones de estado y constitutivas apropiadas para dicho fluido, o bien resolviendo la ecuación de Boltzmann, modelo de gases diluidos y potenciales

repulsivos,  $\phi(r) \sim r^{-v}$ , que en un principio daría soluciones realistas para ondas de choque en gases monoatómicos a bajas densidades ( $< 100$  amagats). Toda la historia del desarrollo teórico de modelos para ondas de choque está basada en una de estas dos alternativas, además de las teorías basadas en modelos numéricos que requieren una discusión aparte. Es importante señalar aquí que el segundo método ha sido ampliado recientemente para estudiar ondas de choque en gases densos formados por esferas duras usando la ecuación de Enskog [28].

En la modalidad (b), Grad en su trabajo de 1952 integró las ecs. (21.7a-c) usando las ecuaciones de estado para un gas ideal.

$$p = \rho RT \quad \varepsilon = \frac{3}{2} RT$$

y las ecuaciones lineales de Navier-Newton y Fourier,

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3} \eta \frac{du}{dx} \quad q_x = \kappa \frac{dT}{dx}$$

donde  $\eta$  y  $\kappa$  para gases ideales, son funciones de la temperatura. (Ver capítulo XII, específicamente el cálculo de los coeficientes de transporte). Los resultados de este cálculo lo llevaron esencialmente a los mismos resultados que Becker había obtenido treinta años antes [21] y abandonó la aproximación. De ahí pensó que resolviendo las ecuaciones de los 13 momentos mejoraría la teoría de Navier-Stokes. Los métodos matemáticos empleados por él, aunque convencionales en el estudio de ecuaciones diferenciales, son demasiado laboriosos para reproducir aquí, pero la esencia del resultado es que el método de los trece momentos mejora los resultados de Navier-Stokes pero ya a  $M \sim 1.61$ , la discrepancia es

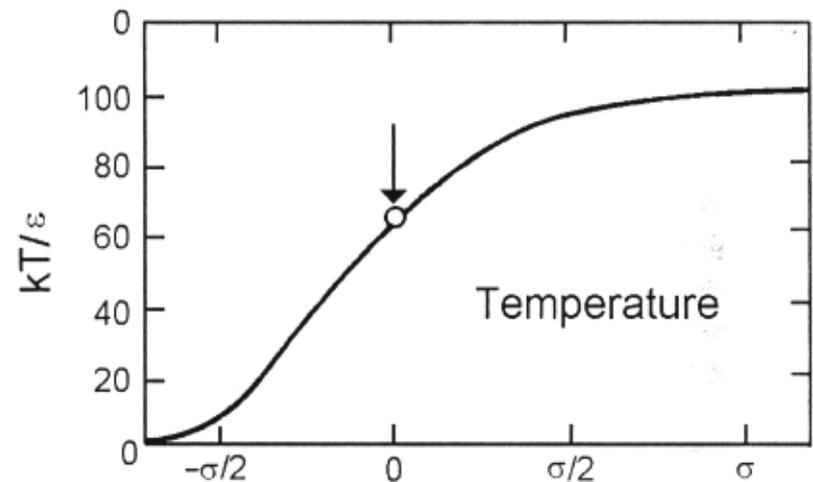
del orden del 15%. No obstante, cálculos recientes que discutiremos más adelante, arrojan mucha más luz sobre la naturaleza de los resultados obtenidos con el método de Grad.

Después del trabajo de Grad y dada la relevancia del tema, sobre todo en aplicaciones tecnológicas, se llevaron a cabo decenas de trabajos intentando comprender las propiedades de las ondas de choque en el contexto de la dinámica de fluidos. Pasaremos por alto aquí esa faceta, ya que es un tanto ajena al propósito del capítulo y referimos al lector a la literatura para mayor información [22]-[23]. Aquí la discusión, repetimos, la enfocamos al aspecto termohidrodinámico cuya fase más interesante e importante apareció en 1980 en un trabajo de W. H. Hoover *et al.* [15] donde se hizo una comparación muy cuidadosa entre los perfiles para una onda de choque calculadas con las ecuaciones de Navier-Stokes y las obtenidas a través de dinámica molecular fuera de equilibrio que es un modelo estrictamente microscópico. En el primer caso las ecuaciones a integrar son las ya citadas (21.7a-c) usando las ecuaciones constitutivas de Navier-Stokes-Fourier pero con parámetros termodinámicos y coeficientes de transporte de un fluido real denso, un líquido de Lennard-Jones. El potencial de interacción es, pues,

$$\phi(r) = 4\epsilon \left\{ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right\} \quad (21.8)$$

$\epsilon$  siendo la profundidad del potencial y  $\sigma$  el diámetro de la coraza (esfera dura). Si  $\epsilon/k_B = 119.8 \text{ K}$  y  $\sigma = 3.405 \text{ \AA}$ , la ec. (21.8) corresponde al argón en su fase líquida. Si ahora tomamos al líquido cerca de su punto triple en el cual  $n\sigma^3 = 0.8442$  y  $k_B T/\epsilon = 0.722$ ,  $n = N/V$  siendo la densidad numérica, se puede simular a un fluido denso con  $n\sigma^3 = 1.571$  y  $k_B T/\epsilon = 100$  usando un pistón que se desplaza a una

velocidad de  $22.4\sqrt{\epsilon/m}$  y la onda de choque resultante se desplaza con una velocidad  $v_s = 48.5\sqrt{\epsilon/m}$ . Sólo como información, estos datos provienen de simulaciones numéricas usando la función de Helmholtz para el fluido de Lennard-Jones obtenida por Hansen y Ree [15]. Los resultados de la integración los discutiremos en un momento. Los valores de  $\eta$  y  $\kappa$ , también se toman de los datos existentes en la literatura para el fluido de Lennard-Jones {[15] ap. B}.



**Figura 21.5** Comparación del perfil de temperatura entre el cálculo usando las ecuaciones de Navier-Stokes (línea sólida) y la simulación por dinámica molecular (o).

La solución microscópica del problema es por solución directa de las ecuaciones de movimiento siguiendo técnicas que el lector puede ver en detalle en el artículo original y en referencias más generales. En la figura 21.5 se muestra la comparación del perfil de temperaturas obtenidos por ambos métodos. La característica notable que se observa tanto en

ése, como en los de la energía y la densidad, es que el modelo microscópico da perfiles más anchos respecto al centro de la onda que las ecuaciones de Navier-Stokes. Pero además hay dos resultados adicionales que se extraen del modelo microscópico y que han sido muy importantes en los desarrollos subsecuentes. El primero es que las temperaturas en el plano perpendicular a la dirección de propagación y la temperatura en la dirección de propagación no son iguales. El segundo es que la función de distribución de velocidades en la onda, no es maxwelliana. No obstante, los autores de ese trabajo afirman que los resultados obtenidos de la hidrodinámica de Navier-Stokes describen "razonablemente bien" a las obtenidas por dinámica molecular. En qué intervalos de números de Mach es válida esta afirmación y cómo concuerdan ambos cálculos con el experimento, no se tocan en este análisis.

Usando el primer resultado, Holian en 1987 [24] propuso un modelo "ad hoc" para calcular perfiles de ondas de choque, hoy conocido como el modelo de las dos temperaturas. La idea esencial detrás del modelo es conservar la estructura de las ecuaciones de Navier-Stokes para calcular los perfiles de la onda pero la dependencia con la temperatura de los coeficientes de transporte debe modificarse. De hecho, siendo el coeficiente de viscosidad cortante el más importante en la descripción del fenómeno, su dependencia con  $T$  debe sustituirse por  $T_{xx}$ , la temperatura en la dirección de propagación de la onda. Esto se basa en la observación de Holian que si  $T = 1/3(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz})$ ,  $T_{xx} \sim 1.3T$  cerca del frente de onda. Los resultados que se obtienen con este modelo mejoran notablemente la comparación con la integración de las ecuaciones microscópicas con dinámica molecular realizadas anteriormente por Holian y Hoover [15]. No obstante, una justificación de este modelo usando teoría cinética de los gases, aun para gases diluidos, no se había intentado. Antes

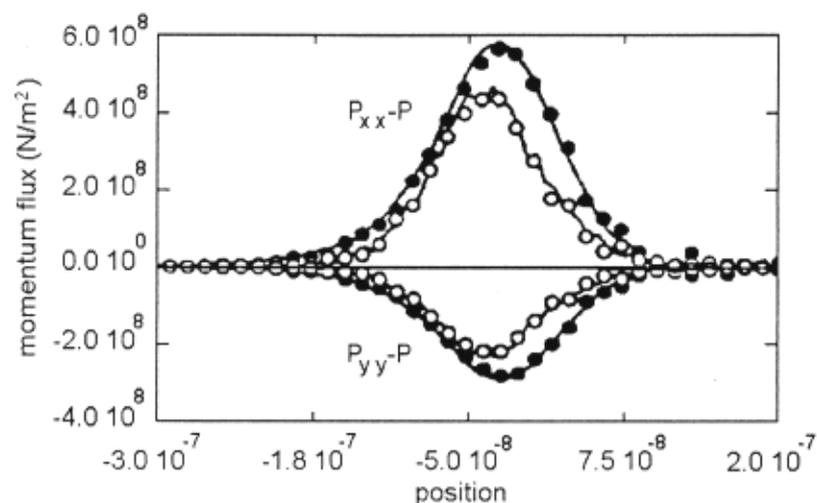
de discutir este aspecto, vale la pena continuar con la línea de trabajo propuesta por Hoover. El siguiente paso significativo provino del trabajo de Salomons y Mareschal que en 1992 dieron a conocer resultados para perfiles de ondas a Machs hasta 134 usando dos técnicas numéricas diferentes, simulación directa de Monte Carlo (SDMC) y el método de dinámica molecular (DM) [25]. La motivación de este trabajo fue, de nuevo, establecer criterios para saber por qué las ecuaciones de Navier-Stokes no describen correctamente perfiles de onda para números de Mach  $\geq 2$ . Para ello calcularon no los perfiles, sino los flujos y las fuerzas en  $4 \leq M \leq 134$  para un gas de esferas duras, haciendo notar que simulaciones de DM para tal sistema no se habían reportado en la literatura. Los coeficientes de transporte utilizados son los que se obtienen de resolver la ecuación de Boltzmann para un gas ideal por el método de Chapman y Enskog (ver ecs. (11.79) y (11.89)) que para esferas duras de diámetro  $\sigma$  se escriben como

$$\eta = \frac{5}{16\sigma^2} \left( \frac{mk_B T}{\pi} \right)^{1/2} \quad \kappa = \frac{25C_v}{32\sigma^2} \left( \frac{mk_B T}{\pi} \right)^{1/2} \quad (21.9)$$

para la viscosidad cortante y la conductividad térmica, respectivamente. Las densidades numéricas utilizadas,  $n$ , están en el intervalo  $3 \times 10^{25} \leq n \leq 1.2 \times 10^{26}$  partículas/m<sup>3</sup>.

Los resultados obtenidos fueron sorprendentes, no tanto para los perfiles de la onda (figura 21.6) en los cuales se vuelve a poner de manifiesto la incapacidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, sino para los flujos físicos. En efecto, para  $M = 4$  y  $M = 134$  las partes longitudinales y transversales del tensor viscoso  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{yy}$ , a los cuales se les resta  $p$ , la parte diagonal, son aproximadamente 30% mayores que los valores esperados de la relación lineal de Navier-Newton en tanto que

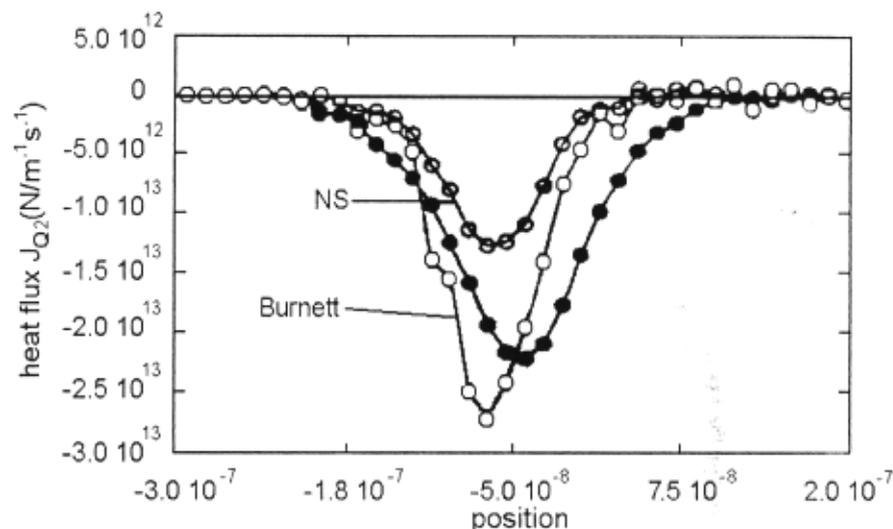
para el flujo de calor  $J_{qx}$ , el valor es 70% mayor que el esperado de la ecuación de Fourier. Para subsanar esta discrepancia introdujeron, en el caso de Fourier la corrección de Burnett no-lineal calculada por C.S. Wang-Chang para esferas duras [26].



**Figura 21.6** Perfiles del tensor de los esfuerzos  $P_{xx} - P$   $P_{yy} - P$  para una onda de choque con  $M = 134$  obtenidas por dinámica molecular y simulación directa de Monte Carlo (línea sólida). Los puntos (•) representan los flujos directamente calculados y (O) los obtenidos con las ecuaciones de Navier-Stokes. Las abscisas están expresadas en unidades de trayectoria libre media.

Como se muestra en la figura 21.7, la mejoría respecto al valor de  $J_{qx}$  en la aproximación de Fourier, es notable. La conclusión de estos autores es que si un cálculo hidrodinámico completo, incluyendo los términos de Burnett fuese posible, sería factible obtener una mejor concordancia con las simulaciones en cuanto al grosor y la estructura del perfil de la onda concierne. El cálculo correspondiente a  $\tau_{xx} - p$  no fue llevado a cabo por razones técnicas. Es importante resaltar

aquí el hecho de que estos resultados contradicen la idea que se tenía en 1979 de que la aproximación de Burnett, o era incalculable, o sólo mejoraría Navier-Stokes para  $M \leq 2$ . Volveremos a toda esta cuestión en un momento.

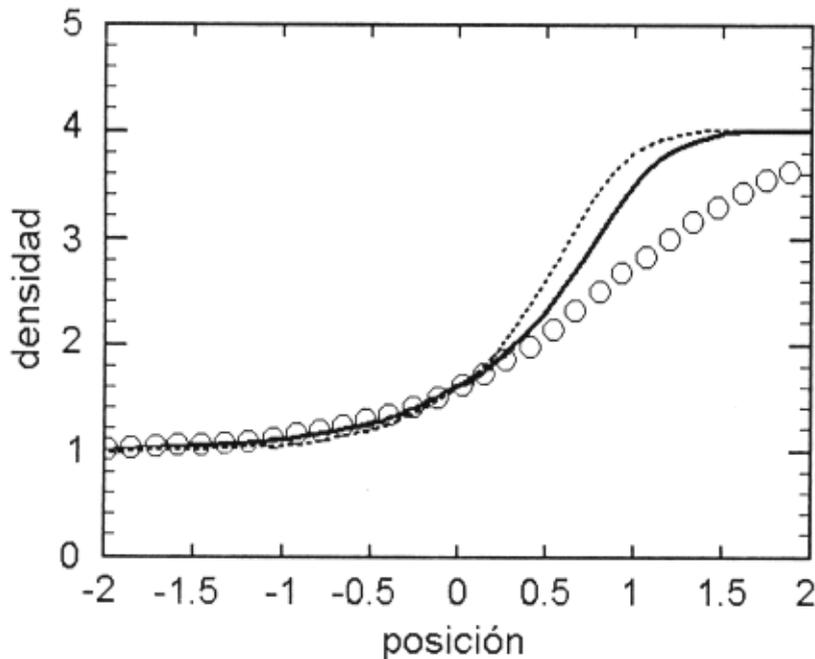


**Figura 21.7** Perfiles de flujo de calor con las mismas especificaciones que en la figura 21.6. Adicionalmente los cuadrados representan las correcciones de Burnett.

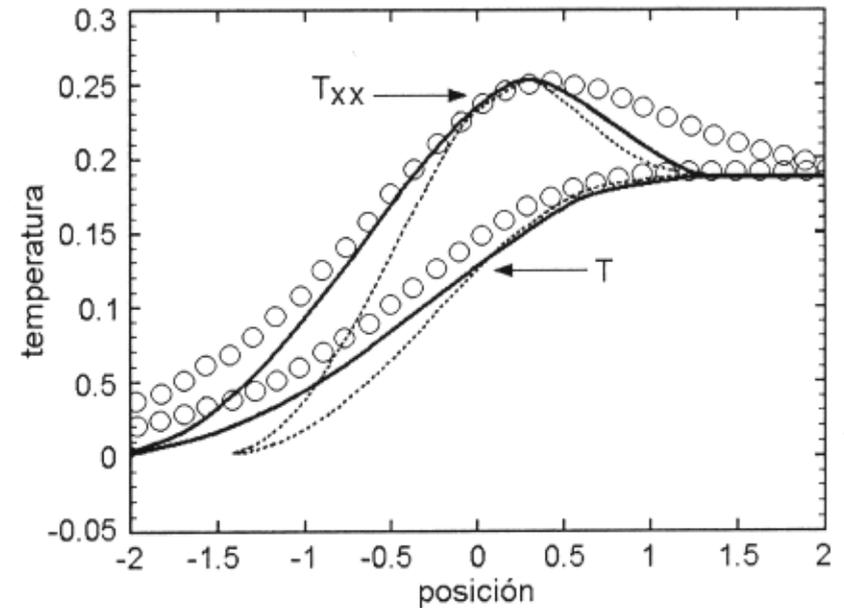
Curiosamente, unos meses después de haber publicado su trabajo, estos autores conjuntamente con Holian [16] parecieron dar marcha atrás en sus conclusiones. En efecto, aludiendo al hecho de que perfiles de ondas de choque en fluidos densos son sorprendentemente bien aproximados resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes, decidieron probar la conjetura de Holian en un gas ideal. El argumento esencial es que en dicho sistema no hay ninguna ambigüedad en definir  $\tau_{xx}$  puesto que

$$p_{xx}V = \sum_i p_{ix}^2/2m = Nk_B T_{xx}$$

en ausencia de fuerzas externas. De nuevo, y sin entrar aquí en detalles que el lector puede ver en el trabajo original, resolvieron el sistema de ecuaciones (7a-c) en la aproximación de Navier-Stokes pero sustituyendo  $T$  en las expresiones para los coeficientes de transporte dados en la ec. (21.9), por  $T_{xx}$ . Los resultados para los perfiles de la onda de choque de la densidad y la temperatura se muestran en las figuras 21.8 y 21.9, respectivamente.



**Figura 21.8** Perfil de densidad vs. posición en unidades de trayectoria libre media para una onda en un gas ideal, Navier-Stokes (línea punteada), Navier-Stokes modificada (línea sólida) y dinámica molecular (círculos).



**Figura 21.9** Perfil de temperaturas vs. posición en donde se grafica la temperatura promedio  $T = (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz})/3$  para: Navier-Stokes (línea punteada), Navier-Stokes modificada (línea sólida) y dinámica molecular (círculos).

A primera vista se llega a la conclusión de que el modelo de Holian es, en efecto, el que mejor concuerda con las simulaciones numéricas. No obstante, el lector sagaz observará sobre todo en el perfil de temperaturas, que los resultados de la DM no parecen converger a un mismo valor en el lado “caliente” de la onda para  $x < -2$  (en unidades de la trayectoria libre media) figura 21.11. Los autores asocian este detalle a la existencia de un mecanismo adicional de relajación no incluido en el modelo. En realidad, como veremos más adelante, esto parece ser más una deficiencia del método numérico mismo, que un proceso de relajación no identificado.

### 3. El modelo de las dos temperaturas

De acuerdo con las conclusiones de la sección anterior, el modelo "ad hoc" de las dos temperaturas propuesto por Holian es el que mejor concuerda con las simulaciones numéricas de ondas de choque en fluidos densos e ideales para  $M \geq 2$ . Cabe señalar aquí que una comparación detallada de estos resultados con los obtenidos experimentalmente por Alsmeyer en el intervalo  $2 \leq M \leq 9$  no se ha llevado a cabo de manera directa. Una pregunta que surge de inmediato es la siguiente: así como las ecuaciones de Navier-Stokes pueden obtenerse de la ecuación de Boltzmann con coeficientes de transporte dados por las ecs. (21.9), ¿no es posible deducir el modelo de las dos temperaturas, también de la ecuación de Boltzmann? Y en segundo lugar, si es posible ¿en qué aproximación es válido? Este problema fue tomado por F.J. Uribe *et al.* en 1993 y dado a conocer recientemente con resultados que, aunque no son del todo gratificantes, ilustran varios puntos que no están explícitamente considerados en el modelo original [27]. La idea fundamental es la de resolver la ecuación de Boltzmann por el método de los momentos de Grad, ya explicado en el capítulo XIII, en la aproximación de 14 momentos, un momento más que en la aproximación usual por la existencia de dos temperaturas. De aquí se pueden obtener las ecuaciones constitutivas correspondientes al régimen de Navier-Stokes, con expresiones explícitas para los coeficientes de transporte, aproximación que llamaremos el modelo de Navier-Stokes de dos temperaturas (NS-2T). Las ecuaciones resultantes se han resuelto numéricamente y se han comparado con las de Navier-Stokes estándar y con resultados obtenidos del modelo Holian.

Consideramos una onda de choque plana, estacionaria en un gas de esferas duras diluido cuyos estados están descritos

por la ecuación de Boltzmann. La onda se propaga en la dirección  $x$  con una velocidad  $\vec{u}(\vec{r}, t) = u(x)\hat{i}$  y suponemos que la energía cinética media a lo largo de  $x$ ,  $(mk_B T_{\parallel}^{(0)}/2)$  es diferente que la misma a lo largo de los otros dos ejes  $(mk_B T_{\perp}^{(0)}/2)$ . A orden cero la función de distribución es una maxwelliana desplazada con dos temperaturas.

$$f^{(0)}(\vec{c}, \vec{r}, t) = n \left( -\frac{m}{2\pi k_B T_{\perp}^{(0)}} \right) \left( -\frac{m}{2\pi k_B T_{\parallel}^{(0)}} \right)^{1/2} \cdot \exp\left( \frac{-m C_x^2}{2k_B T_{\parallel}^{(0)}} \right)^{1/2} \cdot \exp\left( \frac{-m(C_y^2 + C_z^2)}{2k_B T_{\perp}^{(0)}} \right) \quad (21.10)$$

donde  $\vec{c}$  es la velocidad molecular,  $\vec{C} = \vec{c} - \vec{u}(x)$ , la velocidad caótica,  $n$  la densidad numérica,  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $m$  la masa.  $T_{\parallel}^{(0)}$  y  $T_{\perp}^{(0)}$  son las temperaturas, paralela y perpendicular, respectivamente a la dirección de propagación de la onda.

De acuerdo con lo ya expuesto en el capítulo XIII podemos escribir que

$$f(\vec{c}, \vec{r}, t) = f^{(0)}(\vec{c}, \vec{r}, t) \left[ a^{(0)}(\vec{r}, t) \mathcal{H}^{(0)}(\vec{V}) + a_i^{(1)}(\vec{r}, t) \mathcal{H}_i^{(1)}(\vec{V}) + \frac{1}{2!} a_{ij}^{(2)}(\vec{r}, t) \mathcal{H}_{ij}^{(2)}(\vec{V}) + \frac{1}{3!} a_{ijk}^{(3)}(\vec{r}, t) \mathcal{H}_{ijk}^{(3)}(\vec{V}) + \dots \right] \quad (21.11)$$

donde

$$V_x = \left( \frac{m}{k_B T_{\parallel}^{(0)}} \right)^{1/2} C_x \quad ; \quad V_{y,z} = \left( \frac{m}{k_B T_{\perp}^{(0)}} \right)^{1/2} C_{y,z} \quad (21.12)$$

las  $a_{i\dots i}^{(s)}(\vec{r}, t)$  son los momentos de Grad definidos en las ecs. (13.6) y  $\mathcal{H}_{ij} \dots$  los polinomios de Hermite, también definidos en el capítulo XIII, ecs. (13.5).

En la aproximación de los 14 momentos,  $a^{(s)}(\vec{r}, t) = 0$  para toda  $s \geq 4$  y además que  $a_{ijk}^{(3)} \mathcal{H}_{ijk}^{(3)} = 0$  donde  $a_{ijk}^{(3)}$  es el tensor sin traza. El resto del procedimiento es estándar y no daremos aquí los detalles, sólo delinearemos los pasos esenciales. Primero, introducimos los momentos físicos que usaremos en la descripción,

$$\boldsymbol{\tau} = \int f(\vec{c}, \vec{r}, t) m \vec{C} \vec{C} d\vec{C} \quad (21.12a)$$

$$\vec{q} = \int f(\vec{c}, \vec{r}, t) \frac{m}{2} C^2 \vec{C} d\vec{C} \quad (21.12b)$$

$$\bar{Q} = \int f(\vec{c}, \vec{r}, t) \frac{m}{2} C_x^2 \vec{C} d\vec{C} \quad (21.12c)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  y  $\vec{q}$  son el tensor de esfuerzos y el flujo de calor, respectivamente, y  $\bar{Q}$  el flujo de calor en la dirección  $x$ . En seguida, expresamos a los momentos de Grad en términos de estas variables. Usando la ec. (21.12) se obtiene que

$$a_{ii}^{(2)} = 0, \quad i = x, y, z, \quad a_{ij}^{(2)} = \frac{\tau_{ij}^0}{nk_B \sqrt{T_{\parallel}^{(0)} T_{\perp}^{(0)}}}$$

si  $i = x, j = y$  o  $z$  y

$$a_{yz}^{(2)} = \frac{\tau_{yz}^0}{nk_B T_{\perp}^{(0)}} \quad (21.13)$$

y además,

$$a_{ill}^{(3)} = \sqrt{\frac{m}{k_B T_i^{(0)}}} \left[ \frac{2q_i}{nk_B T_i^{(0)}} + \frac{2Q_i}{nk_B} \left( \frac{1}{T_{\parallel}} - \frac{1}{T_{\perp}} \right) \right]$$

donde  $T_i = T_{\perp}^{(0)}$  si  $i = y$  o  $z$  y  $T_i = T_{\parallel}^{(0)}$  si  $i = x$ .

Introduciendo (21.13) en (21.11), tomando en cuenta la condición de corte y reorganizando términos, es posible ver, después de un álgebra laboriosa, que

$$f = f^{(0)}(1 + \xi) \quad (21.14)$$

donde  $\xi$  mide o representa la desviación de  $f$  respecto a una maxwelliana y tiene la forma,

$$\begin{aligned} \xi = & \mu_{xx} \left( C_x^2 - \frac{k_B T_{\parallel}^{(0)}}{m} \right) + \mu_{xy} (C_x C_y + C_x C_z) + \\ & \mu_{yy} \left( C_{\perp}^2 - \frac{2k_B T_{\perp}^{(0)}}{m} \right) \end{aligned} \quad (21.15)$$

$$+ \mu_{yz} C_y C_z + \theta_x C_x \left( \frac{m C_x^2}{k_B T_{\parallel}^{(0)}} + \frac{m C_{\perp}^2}{k_B T_{\perp}^{(0)}} - 5 \right) +$$

$$\theta_y (C_y + C_z) \left( \frac{m C_x^2}{k_B T_{\parallel}^{(0)}} + \frac{m C_{\perp}^2}{k_B T_{\perp}^{(0)}} - 5 \right)$$

donde  $C_{\perp}^2 \equiv C_{\perp}^2 = C_y^2 + C_z^2$  y los coeficientes  $\mu$  y  $\theta$  están definidos como sigue:

$$\mu_{xx} = \frac{m}{2k_B T_{\parallel}^{(0)}} \left( \frac{\tau_{xx}}{nk_B T_{\parallel}^{(0)}} - 1 \right) \quad (21.16a)$$

$$\mu_{xy} = \frac{m\tau_{xy}}{nk_B^2 T_{\parallel}^{(0)} T_{\perp}^{(0)}} \quad (21.16b)$$

$$\mu_{yy} = \frac{m}{2k_B T_{\perp}^{(0)}} \left( \frac{\tau_{yy}}{nk_B T_{\perp}^{(0)}} - 1 \right) \quad (21.16c)$$

$$\mu_{yz} = \frac{m\tau_{yz}}{nk_B T_{\perp}^{(0)2}} \quad (21.16d)$$

$$\theta_x = \frac{m}{5k_B T_{\parallel}^{(0)}} \left[ \frac{q_x}{nk_B T_{\perp}^{(0)}} + \frac{1}{nk_B} \left( \frac{1}{T_{\parallel}^{(0)}} - \frac{1}{T_{\perp}^{(0)}} \right) Q_x \right] \quad (21.17a)$$

$$\theta_y = \frac{m}{5k_B T_{\perp}^{(0)}} \left[ \frac{q_y}{nk_B T_{\perp}^{(0)}} + \frac{1}{nk_B} \left( \frac{1}{T_{\parallel}^{(0)}} - \frac{1}{T_{\perp}^{(0)}} \right) Q_y \right] \quad (21.17b)$$

y además, substituyendo la ec. (21.10) en  $p$  y la definición de energía interna,  $E = 3/2 k_B T/m$  obtenemos que

$$p = \frac{1}{3} nk_B T_{\parallel}^{(0)} + \frac{2}{3} nk_B T_{\perp}^{(0)} \quad (21.18)$$

y que

$$E(x) = \frac{3}{2} \frac{k_B T(x)}{m} \quad (21.19)$$

donde,

$$T(x) = \frac{1}{3} T_{\parallel}^{(0)} + \frac{2}{3} T_{\perp}^{(0)} \quad (21.20)$$

Por último, la condición que define la presión hidrostática, esto es que  $Tr\boldsymbol{\tau} = 3p$  implica que

$$\mu_{xx} = - \left( \frac{T_{\perp}^{(0)2}}{T_{\parallel}^{(0)}} \right)^2 \mu_{yy} \quad (21.21)$$

Además, substituyendo directamente la ec. (21.15) en (21.12b y c) después de cancelar todo un número de términos cuya integral se anula, se obtiene que

$$q_x = \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{T_{\perp}^{(0)}}{T_{\parallel}^{(0)}} \right) Q_x \quad (21.22)$$

que refleja la asimetría en el flujo de calor. Nótese ahora que después de todas estas transformaciones sólo nos quedan nueve variables independientes,  $n$ ,  $u_x(x)$ ,  $T_{\parallel}^{(0)}$ ,  $T_{\perp}^{(0)}$  que aparecen en  $f^{(0)}$  y seis flujos  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $q_x$  y  $q_y$  más la ec. (21.21) que da una relación entre  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{yy}$ . El problema ahora es obtener las ecuaciones constitutivas que expresen los cinco flujos independientes en términos de las cuatro variables de estado que aparecen en  $f^{(0)}$ .

La deducción tanto de las ecuaciones de conservación (21.7a-c) como la de los flujos se hace siguiendo el método tradicional. La ecuación de Boltzmann, (10.20) se multiplica por la correspondiente función microscópica asociada a cada variable, llamémosla  $\psi(\vec{c})$  y se integra sobre todas las velocidades

$$\int d\vec{c} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{c} \cdot \text{grad} f \right\} \psi(\vec{c}) d\vec{c} = \int d\vec{c} J(f, f) \psi(\vec{c}). \quad (21.23)$$

Si  $\psi(\vec{c}) = \{1, \vec{c}, c^2\}$  obtenemos (21.7a-c). Para las otras ecuaciones, si sólo conservamos términos lineales en los flujos, basta usar  $\psi(\vec{c}) = \{3m/2c_x^2, m/2c_x^3\}$ . La evaluación del término de colisiones y el álgebra involucrada es un tanto engorrosa y no la detallaremos aquí (ver ref. [27]). Los resultados que se obtienen para los únicos flujos necesarios,  $\tau_{xx}$  y  $q_x$ , así como para  $T_{\parallel}^{(0)}$  y  $T_{\perp}^{(0)}$  son las siguientes

$$\tau_{xx} = nk_B T_{\parallel}^{(0)} + \frac{8n^2 k_B^3 T_{\parallel}^{(0)3}}{5} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \quad (21.24)$$

que da lugar a una viscosidad cortante  $\eta_{xx}$  dada por

$$\eta_{xx} = \frac{2n^2 k_B^3 T_{\parallel}^{(0)3}}{m^2} \Xi^{-1} \quad (21.25)$$

donde  $\Xi$  es una integral de colisión definida y evaluada en la ref. [27].

$$q_x = \frac{3}{2} Ank_B T_{\parallel}^{(0)} \frac{k_B}{m} \frac{\partial T_{\parallel}^{(0)}}{\partial x} \quad (21.26)$$

que da una conductividad térmica

$$\kappa = -\frac{15n^2}{\Gamma_q} \left( \frac{k_B T_{\parallel}^{(0)}}{m} \right)^2 \left( \frac{k_B T_{\perp}^{(0)}}{m} \right)^2 Ak_B \quad (21.27)$$

donde

$$A = \frac{k_B T_{\parallel}^{(0)}}{m} \frac{10nk_B T_{\perp}^{(0)}}{5} \frac{1}{\Gamma_q} \frac{1}{1+(c-1)/(1+2c/3)} \quad (21.28)$$

$\Gamma_q$  una integral de colisión definida, evaluada también en [27], y  $c = T_{\parallel}^{(0)}/T_{\perp}^{(0)}$ .

Nótese que las expresiones (21.24) y (21.26) son generalizaciones a las ecuaciones constitutivas de Navier-Newton y Fourier y se reducen a sus expresiones normales cuando  $T_{\parallel}^{(0)} = T_{\perp}^{(0)}$ . Por último,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (nk_B T_{\parallel}^{(0)} - nk_B T_{\perp}^{(0)}) \mu(x) \right] = \left( \frac{3m}{2} \right) \xi_{xx} \quad (21.29)$$

es la ecuación constitutiva para las temperaturas con  $\xi_{xx}$  siendo una integral de colisión. Estas ecuaciones y las de conservación dan lugar a un conjunto completo (cerrado) de ecuaciones para las variables  $n$ ,  $u(x)$ ,  $T_{\parallel}^{(0)}$ ,  $T_{\perp}^{(0)}$ ,  $\tau_{xx}$  y  $q_x$ . Estas ecuaciones pueden resolverse numéricamente y obtener los correspondientes perfiles para una onda de choque plana. La metodología que se siguió para llevar a cabo este programa es simple en su concepción, pero nada trivial en su forma operativa. Las ecuaciones de transporte se escriben en términos de las variables adimensionales apropiadas para poder comparar con los resultados tanto de Holian como de Navier-

Stokes ( $T_{\parallel}^{(0)} = T_{\perp}^{(0)}$ ). El sistema se integra numéricamente usando las mismas condiciones iniciales utilizadas por Holian y se toma un número de Mach  $M = 134$ . Los detalles del cálculo están discutidos con todo detalle en el trabajo original. Los resultados, sin embargo, no son tan halagüeños. En la aproximación lineal aquí considerada, el perfil de la onda de choque concuerda razonablemente bien con los resultados de la teoría de Holian pero el comportamiento asintótico del perfil no parece ser el correcto (figura 21.10). Esto es, si una parte de la porción caliente de la onda y se integra hacia la región fría, debe esperar que las temperaturas  $T_{\parallel}^{(0)}$  y  $T_{\perp}^{(0)}$  se igualen y tiendan al valor de equilibrio. Refiriéndonos al caso de la figura 21.10 donde la simulación numérica se restringe al intervalo  $-2 \leq x \leq 2$ , ocurre en el caso de la teoría NS-2T que las temperaturas se igualan cuando vamos a regiones  $|x| > 2$ .

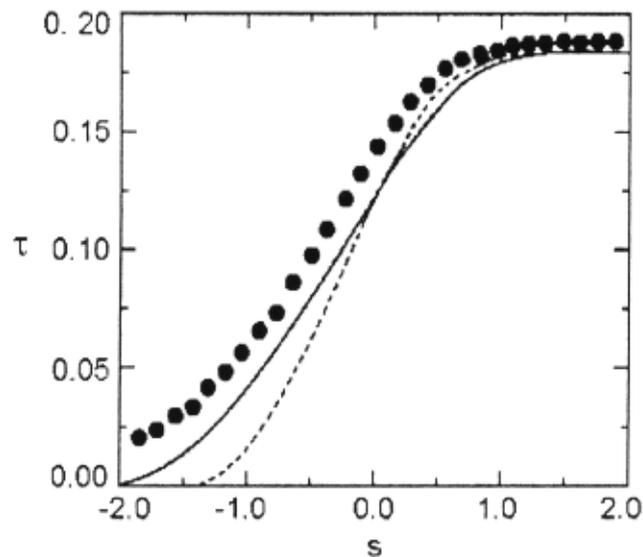


Figura 21.10 Perfil de temperatura vs. dinámica molecular (círculos) con  $M = 134$ , Navier-Stokes (línea punteada), teoría de Holian (línea sólida).

Este comportamiento asintótico, que tampoco es muy evidente de las simulaciones numéricas, es el que se asocia con el modelo de relajación extra en la figura 21.9. Pero podría ser que el método numérico mismo no sea capaz de discernir esta cuestión por problemas de “ruido computacional”. Otra dificultad que refleja o apoya esta deficiencia se aprecia al integrar desde un punto donde  $T_{\parallel}^{(0)} \neq T_{\perp}^{(0)}$  hasta la región asintótica en la cual tienden a igualarse; una vez que se igualan si se integra en dirección opuesta, en el punto inicial *no* se obtienen las temperaturas diferentes. De esta manera podemos concluir que la teoría NS-2T basada en los 14 momentos de Grad y linealizada *no* constituye el fundamento cinético requerido para soportar el método de Holian.

#### 4. Aproximación de Burnett

Después de la aparición del trabajo de Solomons y Mareschal [25] donde, insistimos, se puso en evidencia la importancia de las correcciones de Burnett para mejorar la concordancia entre los resultados numéricos obtenidos para el flujo de calor a  $M = 8$  y  $M = 134$  con la teoría del continuo, poco se hizo por corroborar esta afirmación. Inclusive, en el trabajo posterior de estos autores con Holian no volvieron a mencionar a Burnett haciendo pensar que para explicar la estructura de ondas de choque a Machs  $> 2$  bastaba la teoría de Holian. En 1995 De Haro y Garzón [28] utilizaron lo que en la teoría cinética de gases densos modelados por esferas duras se conoce como la teoría revisada de Enskog para integrar numéricamente las ecuaciones (21.7a-c) usando las ecuaciones de estado y coeficientes de transporte generados por dicha teoría utilizando las ecuaciones linealizadas de Burnett. Los resultados fueron comparados con las simula-

ciones numéricas llevadas a cabo para un sistema denso de esferas duras [25] para  $M = 4$  y  $M = \infty$ . Los resultados obtenidos, aunque no son concluyentes, definitivamente corroboraron a  $M = 4$  lo que se espera, esto es, mejoran los resultados de NS así como los de Holian. No obstante, el método no es muy concluyente para Machs grandes, tampoco se puede descartar la posible mejoría de la aproximación. Este trabajo aún está en vías de desarrollo [29].

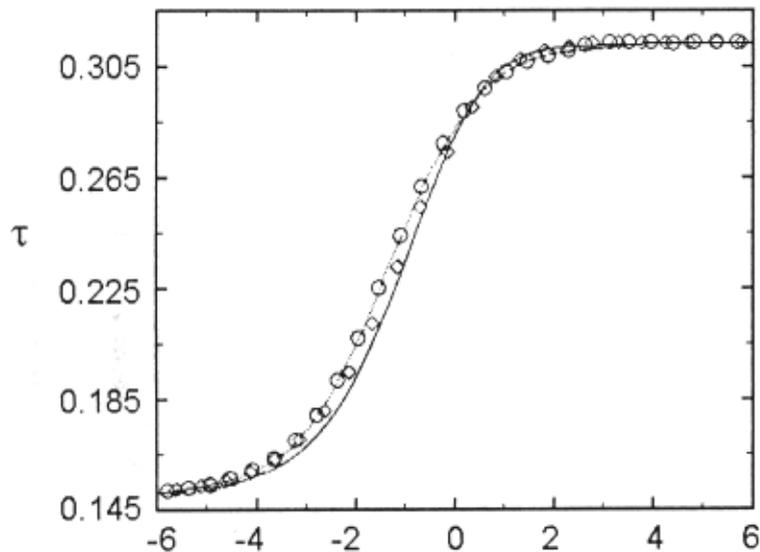


Figura 21.11 Perfiles de temperatura reducida para  $M=2$  Navier-Stokes (línea sólida), Burnet (O), Monte Carlo "teoría de Holian" ( $\diamond$ ).

Por otra parte, en 1998 F. J. Uribe *et al.* lograron llevar a cabo una tarea que era ya esperada desde hace muchos años, a saber, integrar las ecuaciones no lineales de la hidrodinámica en la aproximación de Burnett [30]. Los coeficientes de transporte utilizados son los que resultan del desarrollo de Chapman y Enskog de la ecuación de Boltzmann a segundo

orden en los gradientes. Los resultados, contrario a los presentados en el párrafo anterior, son válidos para gases diluidos. El método seguido es una verdadera "tour de force" de análisis numérico un tanto sofisticado para presentar aquí. Sin embargo, los resultados son elocuentes por sí mismos como lo muestra la figura 21.11. Para  $M = 134$  la concordancia de esta aproximación supera la obtenida por el modelo "ad hoc" de Holian y confirma así la conjetura de Solomons y Mareschal.

Este trabajo [32] dista mucho de constituir la respuesta final al problema de calcular la estructura de ondas de choque. Como se discute en él, hay todavía pormenores matemáticos por aclarar [33], falta ver si para fluidos densos es aplicable y discutir también la comparación con los pocos resultados experimentales que existen. La estructura de las ondas de choque es un capítulo no sólo abierto al problema mismo, sino que hace resurgir con fuerza lo señalado en el capítulo XIV. Siendo las ecuaciones de Burnett ecuaciones constitutivas no lineales, ¿son consistentes con la hipótesis de equilibrio local y con la segunda ley si la matriz especificada en la ec. (14.5b) es simétrica, o debemos abandonar la primera y buscar una termodinámica extendida que las incluya en su estructura? Aunque un análisis preliminar de esta cuestión fue hecho hace 18 años [31], la pregunta subsiste, pero en nuestra opinión la primera alternativa es la más atractiva y también la más viable.

### Problemas

1. Tómese la ecuación de estado de un gas ideal  $p v = RT/M$  donde  $v = 1/\rho$  es el volumen específico y  $M$  el peso molecular y la energía interna  $e = c_v^*/M T + \text{const.}$  donde

$c_v^*$  es el calor específico molar. Mostrar que la ecuación de Rankine-Hugoniot se puede reescribir como

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2c_v^* + R + \pi R}{2c_v^* + R + R/\pi}$$

donde  $\pi = p/\rho_0$  es la llamada intensidad de choque. Estudiar el límite para choques intensos,  $\pi > 1$ .

2. Usar el resultado del problema anterior para mostrar que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1 + \mu\pi}{1 + \mu/\pi}$$

donde  $\mu = R/2c_v^* + R = \gamma - 1/\gamma + 1$  con  $\gamma = c_p^*/c_v^*$ .

3. Escribir explícitamente los resultados de los problemas anteriores para un gas mono y diatómicos y graficar  $T/T_0$  como función de  $\pi$ . ¿A cuánto se eleva la temperatura en un gas como el argón si  $\pi = 10$  ¿y si  $\pi = 100$ ?
4. Mostrar que para gases mono y diatómicos

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1 + n\pi}{n + \pi} \quad \begin{array}{l} n=4 \text{ si el gas es monatómico} \\ n=6 \text{ si el gas es diatómico} \end{array}$$

5. Mostrar que

$$\frac{v}{v_0} = \left[ \frac{2}{\gamma(\gamma+1)} \frac{(\pi-1)^2}{\pi+\mu} \right]^{1/2}$$

donde  $v_0 = \sqrt{\gamma RT_0/M}$  es la velocidad del sonido en el gas no perturbado.

6. Definiendo el número de Mach  $M = V/v_0$  (figura 21.1) mostrar que

$$M = \left[ \frac{\gamma+1}{2\gamma} (\pi+\mu) \right]^{1/2}$$

y encontrar los valores de  $M$  para gases mono y diatómicos si  $\pi \gg 1$ . Con base en los resultados de este problema y del problema 3, ¿tiene sentido físico hablar de una onda de choque en  $M = 100$ ? ¿Por qué? ¿Para valores de  $M$  consideraría Ud. que la onda de choque es intensa?

7. Mostrar que para choques débiles

$$M = 1 + \frac{\pi-1}{2(1+\mu)} + O(\pi-1)^2.$$

8. Si  $\pi \sim 1$  pero un poco mayor, ¿consideraría  $(\pi-1)$  como un parámetro adecuado para hacer un desarrollo en series en la ecuación de Boltzmann para tratar el problema cinéticamente? ¿Por qué? (Ver ref. 26).
9. Haga una gráfica de  $M$  vs.  $\pi$  para gases mono y diatómicos y discuta objetivamente sus implicaciones físicas.

## Referencias

- [1] L. Landau y E. Lifshitz; *Fluid Mechanics* (Addison-Wesley Publ. Co., Reading Mass., 1966) Cap. IX.
- [2] Y.B. Zeldovich y Y.P. Raizer; *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Academic Press, N.Y. 1967).
- [3] W.G. Vincenti y C.H. Kruger; *Introduction to Physical Gas Dynamics* (John Wiley & Sons, N.Y. 1957) Cap. 10.
- [4] M.N. Kogan; *Rarified Gas Dynamics* (Plenum Press, N.Y. 1967).

- [5] R. Courant y K.O. Friedrichs; *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience Publ. Co. N.Y. 1948).
- [6] J. W. Bond, K.M. Watson y J. A. Welch Jr.; *Atomic Theory of Gas Dynamics* (Addison Wesley Publ. Co., Reading Mass., 1965) Ver. cap. 2 para tratamiento elemental.
- [7] J.N. Bradley; *Shock Waves in Physics and Chemistry* (John Wiley & Sons, N.Y. 1962)
- [8] H. Grad; The Profile of a Steady Plane Shock Wave; *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. V, 257 (1952).
- [9] L. H. Holway; *Phys. Fluids* **7**, 911 (1964).
- [10] J.P. Guiraud; Proc. 13<sup>th</sup> Int. Congr. Theor. Appl. Mech., p. 4 (1973).
- [11] F.S. Sherman y L. Talbot; *Proc. First Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics*, F.M. Devienne, ed. (Pergamon Press, N.Y. 1960) p. 161.
- [12] J. Foch in *The Boltzmann Equation, Theory and Applications*; E. G. D. Cohen and W. Thirring, eds. (Springer Verlag, Wien, 1973) p. 123.
- [13] W. Weiss; *Phys. Fluids* **8**, 1689 (1996).
- [14] W.G. Hoover; *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1531 (1979).
- [15] B.L. Holian, W.G. Hoover, B. Moran, G.K. Straub; *Phys. Rev.* **A22**, 2798 (1980).
- [16] B.L. Holian, C.W. Patterson, M. Mareschal y E. Salomons; *Phys. Rev.* **A47**, R24 (1993).
- [17] H. Alsmeyer; *J. Fluid. Mech.* **74**, 497 (1979).
- [18] G.A. Bird; *Molecular Gas Dynamics* (Oxford University Press, Oxford 1994).
- [19] H.M. Mott-Smith; *Phys. Rev.* **82**, 885 (1951).
- [20] B.L. Hicks, S.M. Yen y B.J. Reilly K; *J. Fluid. Mech.* **53**, 85 (1972).
- [21] R. Becker; *Zeits. für Phys.* **8**, 321 (1922).
- [22] M. Al-Ghoul y B.C. Eu; *Phys. Rev.* **56E**, 2981 (1997) y referencias ahí citadas.
- [23] S.M. Yen; *Ann. Rev. Fluid. Mech.* **16**, 67 (1984).
- [24] B. L. Holian; *Phys. Rev.* **A37**, 2562 (1988) y su artículo en *Microscopic Simulations of Complex Hydrodynamic Phenomena*; M. Mareschal y B.L. Holian, eds. (Plenum Press, N.Y. 1992) p.75.
- [25] E. Salomons y M. Mareschal; *Phys. Rev. Lett.* **69**, 269 (1992).
- [26] C. S. Wang Chang en "Studies in Statistical Mechanics" J. De Boer y G.E. Uhlenbeck eds. (North Holland Publ. Co., Amsterdam 1979 Vol. V), cap. III.
- [27] F. J. Uribe, R.M. Velasco y L.S. García-Colín; *Phys. Rev.* **A58**, 3209 (1998).
- [28] M. López de Haro y V. Garzó; *Phys. Rev.* **52E**, 5688 (1995).
- [29] J. M. Montanero, M. López de Haro, V. Garzó y A. Santos; *Phys. Rev.* **58E**, 7319 (1998), *ibid. Phys. Rev.* **60E**, 7592 (1999).
- [30] F. J. Uribe, R.M. Velasco y L.S. García-Colín; *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2044 (1998).
- [31] L. S. García Colín y M. López de Haro; *J. Non-equilib. Thermodyn.* **7**, 85 (1982).
- [32] F. J. Uribe, R. M. Velasco, L. S. García-Colín y E. Díaz-Herrera; *Phys. Rev.* **E62**, 6648 (2000).
- [33] F. J. Uribe, R. M. Velasco y L. S. García-Colín; *Phys. Rev.* **E62**, 5385 (2000).