Introducción a las Ondas de Choque

Luis Moraga

Centro de Física Experimental, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile

Curso de Pre- y Postgrado ONDAS DE CHOQUE, 2008

Asunto:

La naturaleza de las ondas de choque:

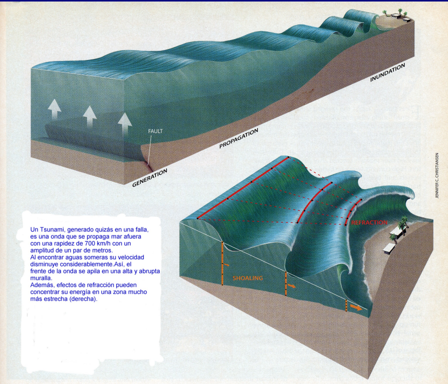


Figura: Un tsunami.

La naturaleza de las ondas de choque:

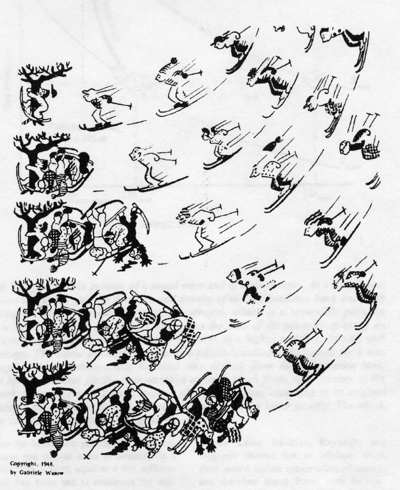


Figura: Ejemplo de una onda de choque

La naturaleza de las ondas de choque:

Figura: Hugoniot y compañeros (1870)

La naturaleza de las ondas de choque:

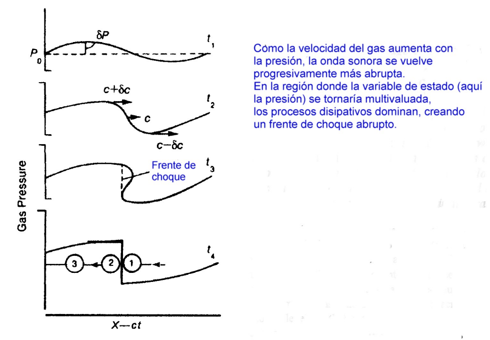


Figura: Formación de una onda de choque

La naturaleza de las ondas de choque:

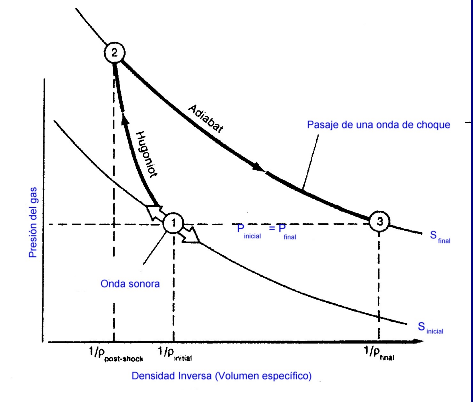
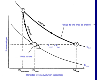


Figura: Pasaje de una onda sonora y de una onda de choque.

La naturaleza de las ondas de choque:

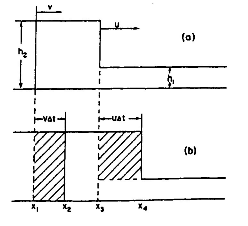


Al paso de una onda sonora (1), el sistema oscila a lo largo de una adiabática (curva de entropía constante). Por el contrario, al paso de una onda de choque, el sistema salta de una manera irreversible a lo largo de una Hugoniot hasta otro estado (2) con mayor presión, densidad y entropía. Pasada la onda de choque, el sistema relaja a lo largo de una nueva adiabática hasta un estado (3) con la presión original, pero menor densidad y mayor entropía y temperatura.

¿ Qué cambia de un modo continuo a través de la superficie de discontinuidad?

- El flujo de masa.
- El flujo de momentum.
- El flujo de energía.

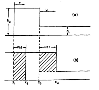
Onda de marea propagándose a lo largo de un canal rectangular:



v es la velocidad del agua detrás del frente de discontinuidad. u es la velocidad del frente de discontinuidad.
Conservación de masa: $h_2 v\Delta t = (h_2 - h_1)u\Delta t$.

$$v = u\left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right).$$

Continuidad en las superficies de discontinuidad:



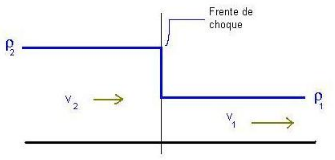
Masa adicional que adquiere rapidez v = $\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t$
Fuerza neta hacia la derecha = $\frac{1}{2}\rho g h_2^2 - \frac{1}{2}\rho g h_1^2$

$$(\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t) v = (\tfrac{1}{2}\rho g h_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho g h_1^2)\Delta t$$

$$u^2 = \tfrac{1}{2} g (h_2 + h_1) \frac{h_2}{h_1}$$

Si $h_1 \simeq h_2$, entonces $u \simeq \sqrt{gh}$.

Condiciones de continuidad:

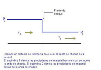


Usamos un sistema de referencia en el cual el frente de choque está inmóvil.
El subíndice 1 denota las propiedades del material hacia el cual se mueve la onda de choque. El subíndice 2 denota las propiedades del material detrás de la onda de choque.

Continuidad de la corriente de masa:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = j. \tag{1}$$

j = corriente de masa = densidad de momentum.



Continuidad de la corriente de momentum:

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2. \tag{2}$$

Continuidad de la corriente de energía:

$$w_1 + \tfrac{1}{2}v_1^2 = w_2 + \tfrac{1}{2}v_2^2. \tag{3}$$

$$w = \epsilon + pV$$

w: densidad de entalpía. ϵ: densidad de energía interna.

Ecuaciones fundamentales:

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \quad \text{(Línea de Rayleigh.)}$$

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \tfrac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2) = 0$$

(Adiabática de choque o Hugoniot.)
$V_1 = 1/\rho_1$, $V_2 = 1/\rho_2$: Volúmenes específicos.

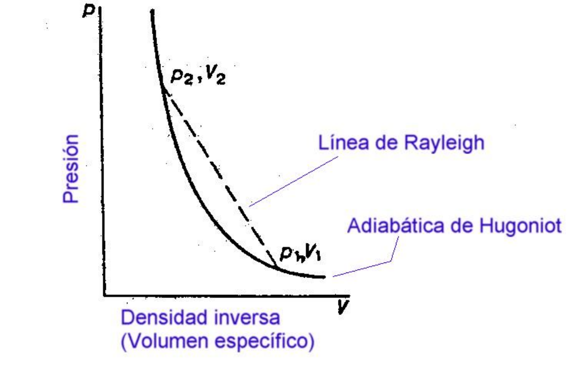


Figura: p_1, V_1 estados iniciales. p_2, V_2 estados finales.

Gases politrópicos

Un gas *politrópico* es uno en el cual la presión es inversamente proporcional a una potencia (entera, fraccional o irracional) del volumen:

$$p = \frac{\text{Constante}}{V^\gamma}.$$

En este gas la curva de entropía constante (adiabática de Poisson) es

$$pV^\gamma = \text{Otra constante}.$$

La energía interna es

$$\epsilon = c_V T = \frac{pV}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)}.$$

La entalpía es

$$w = c_p T = \frac{\gamma p V}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1}.$$

En un gas politrópico la adiabática de choque (o de Hugoniot)

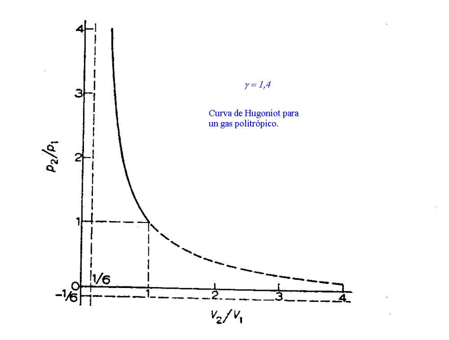
$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0$$

resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_2} &= \frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2} \\ &= \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2 + 2} \end{aligned}$$

donde $M_1 = v_1/c_1$ es el número de Mach.

Adiabática de Hugoniot en un gas politrópico



Relación entre las temperaturas a uno u otro lado de la discontinuidad:

$$\begin{aligned}\frac{T_2}{T_1} &= \frac{p_2}{p_1}\frac{(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2} \\ &= \frac{[2\gamma M_1^2-(\gamma-1)][(\gamma-1)M_1^2+2]}{(\gamma+1)^2 M_1}.\end{aligned}$$

Relación entre las presiones a uno u otro lado de la discontinuidad:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

Relación entre los números de Mach (o las velocidades) a uno u otro lado de la discontinuidad:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)};$$

o (más simétricamente)

$$\gamma M_1^2 M_2^2 - \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)(M_1^2 + M_2^2) = 1.$$

Ondas de choque fuertes

$$(\gamma-1)p_2 \gg (\gamma+1)p_1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

Note que el valor máximo de ρ_2 es $\rho_2 = 4\rho_1$ para un gas monoatómico y $\rho_2 = 6\rho_1$ para uno diatómico.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{p_2}{p_1}.$$

En cambio, T_2 puede ser arbitrariamente mayor que T_1.

¿Dónde se produce la discontinuidad?

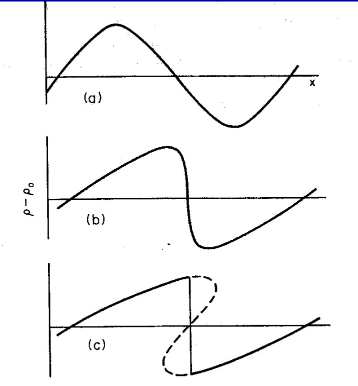


Figura: Formación de una onda de choque.

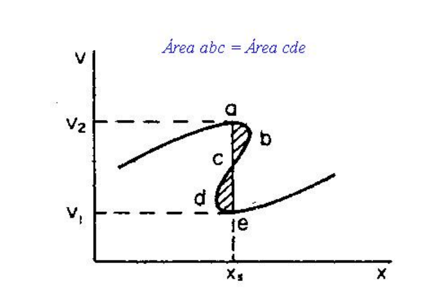


Figura: Las áreas achuradas son iguales.

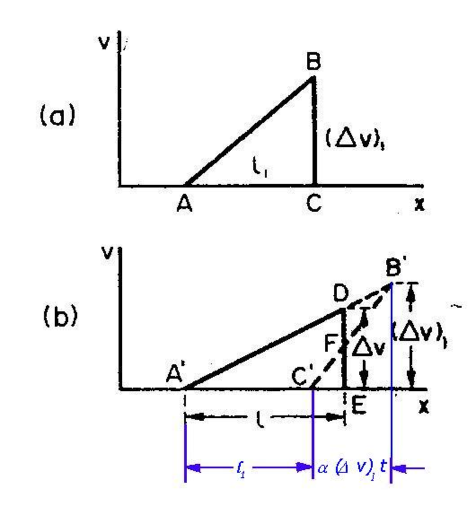
$$\int_{abcd} (x - x_s) dv = 0.$$

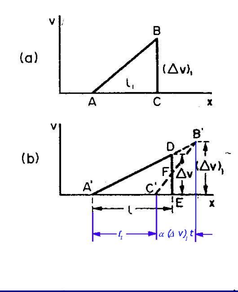
En primera aproximación, hay una relación lineal entre la rapidez del fluido y la del frente de choque $u \simeq c_0 + \alpha v$, con

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{c^4}{2v^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_S \\ &= \tfrac{1}{2}(\gamma + 1) \end{aligned}$$

para un gas politrópico.

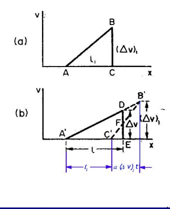
Área ABC = Área $A'DE$





Distancia entre B' y C' = $\alpha(\Delta v)_1 t$.
Tangente del ángulo $DA'E$

$$= \frac{(\Delta v)_1}{\ell_1 + \alpha t(\Delta v)_1} = \frac{\Delta v}{\ell}.$$



Igualdad de áreas:

$$\frac{1}{2}\ell_1(\Delta v)_1 = \frac{1}{2}\ell(\Delta v) = \frac{\ell^2(\Delta v)_1}{2[\ell_1 + \alpha t(\Delta v)_1]}.$$

Entonces:

$$\ell = \ell_1\sqrt{1 + \alpha t(\Delta v)_1/\ell_1} \tag{4}$$

Además:

$$\Delta v = \frac{(\Delta v)_1}{\sqrt{1 + \alpha t (\Delta v)_1 / \ell_1}}, \tag{5}$$

$$E = \tfrac{1}{2}\rho \int v^2 dx = \tfrac{1}{6}(\Delta v)^2 \ell,$$

esto es,

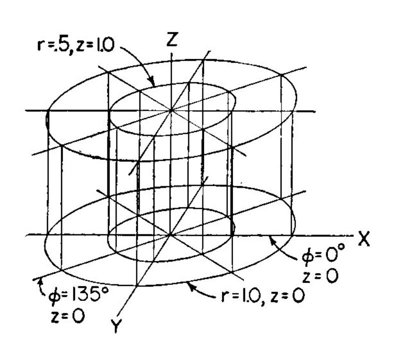
$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \alpha t (\Delta v)_1 / \ell_1}}. \tag{6}$$

Ondas planas

En conclusión, cuando $t \to \infty$,

- La discontinuidad en velocidad disminuye asintóticamente como $1/\sqrt{t}$ (o, equivalentemente, $1/\sqrt{x}$),
- La energía de una onda de choque disminuye asintóticamente como $1/\sqrt{t}$.
- La longitud del pulso aumenta asintóticamente como $\sqrt{t}$.
- La pendiente del perfil $\Delta v/\ell$ es, asintóticamente, independiente del tiempo.

Ondas cilíndricas.



Una *onda cilíndrica* es una solución de la ecuación de onda que depende sólo de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y t.

La función $\psi(x, t)$ = una constante es una posible onda plana.
La función $\psi(r, t)$ = una constante no es una onda cilíndrica posible.
Por lo tanto, al paso de una onda de choque cilíndrica, la zona de compresión debe estar necesariamente seguida de otra de rarefacción.

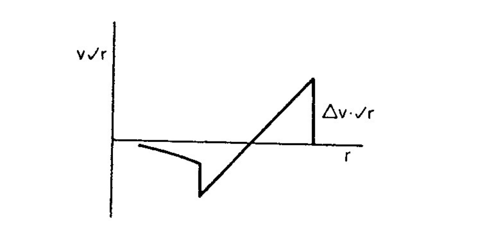
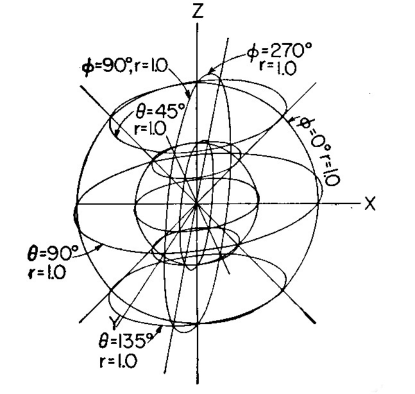


Figura: Perfil de una onda de choque cilíndrica.

Ondas esféricas.



Una *onda esférica* es una solución de la ecuación de onda que depende sólo de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y t.

Atenuación de ondas de choque cilíndricas y esféricas.

Se concluye que, asintíoticamente cuando $r \to \infty$,

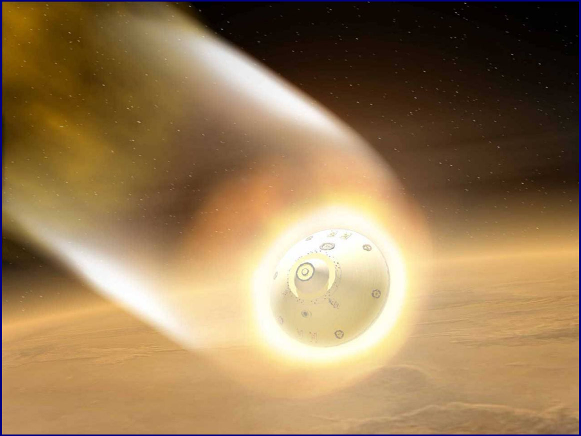
- Para una onda cilíndrica,

$$\Delta v \propto \frac{1}{r^{3/4}}.$$

- Para una onda esférica,

$$\Delta v \propto \frac{1}{r \log(r/a)}.$$

Explorador de Marte



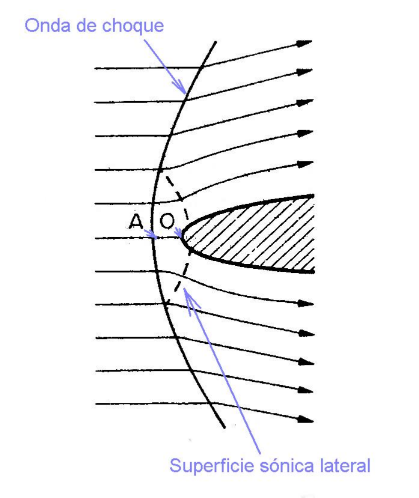
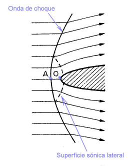


Figura: Objeto romo en movimiento supersónico

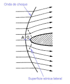
Frenado hipersónico de un objeto romo



$$p_2 = p_1 \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1};$$

$$v_2 = c_1 \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma + 1) M_1};$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}.$$

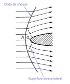


A lo largo de la línea de corriente AO, por Bernoulli:

$$w + \frac{1}{2}v^2 = w_0.$$

Para un gas politrópico

$$w = \frac{c^2}{\gamma - 1}; \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(\gamma-1)}; p = p_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma}.$$



$$\frac{T_0}{T_2} = 1 + \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)M_2^2;$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_2} = \left[1 + \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)M_2^2\right]^{1/(\gamma-1)};$$

$$\frac{p_0}{p_2} = \left[1 + \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)M_2^2\right]^{\gamma/(\gamma-1)};$$

Entonces,

$$p_0 = p_1 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \frac{M_1^2}{\left[\gamma - \frac{1}{2}(\gamma-1)/M_1^2\right]^{1/(\gamma-1)}}.$$

La presión en el vértice del objeto romo,

$$p_0 = p_1 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \frac{M_1^2}{\left[\gamma - \frac{1}{2}(\gamma-1)/M_1^2\right]^{1/(\gamma-1)}},$$

es menor (para $M_1 > 1$) que la que se obtendría por pura retardación adiabática:

$$p_0 = p_1 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \frac{M_1^2}{\gamma^{1/(\gamma-1)}}.$$

Ecuaciones fundamentales

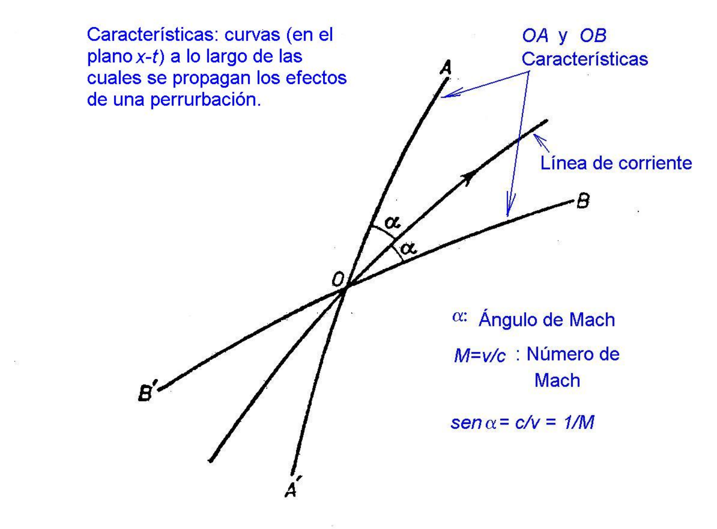
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0; \quad \text{(Ecuación de continuidad.)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0;$$

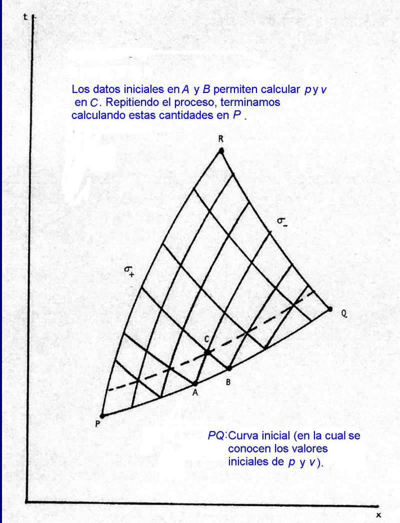
$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \text{(Ecuación de Euler.)} \tag{8}$$

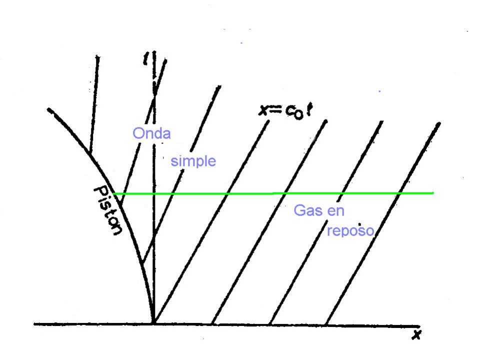
Características



Propagación de los valores iniciales

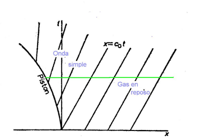


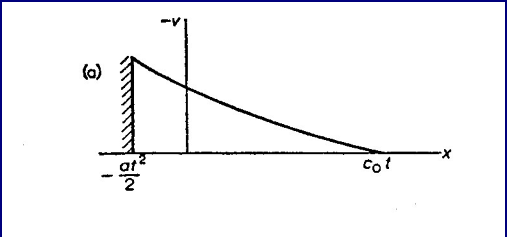
Pistón descomprimiendo un cilindro



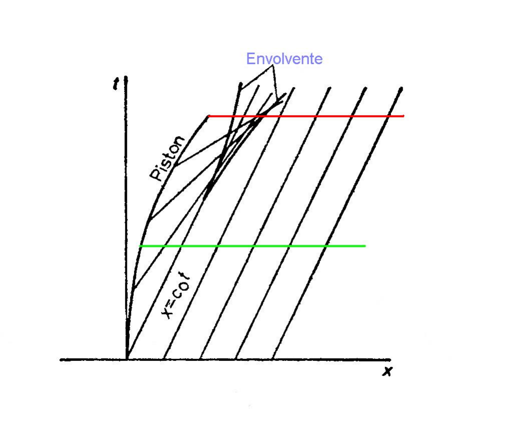
Como el gas vecino al cilindro se mueve junto con el, las características parten formando un ángulo fijo con su trayectoria $t - x$.

Perfil v contra x



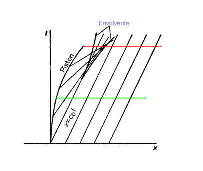


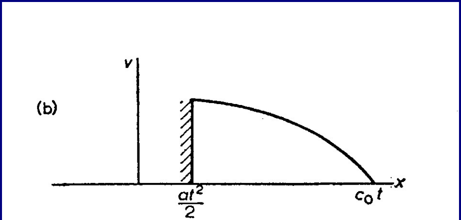
Pistón comprimiendo un cilindro



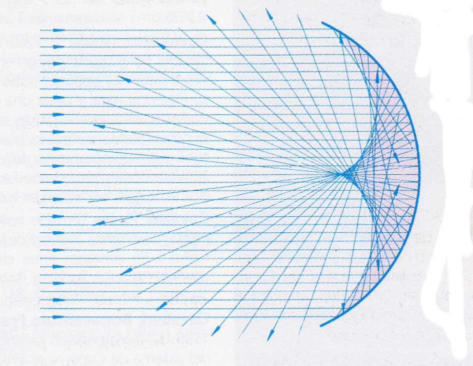
Transcurrido un tiempo breve (en verde) se tiene una solución univaluada

Perfil v contra x (tiempos breves)



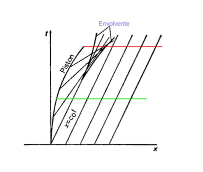


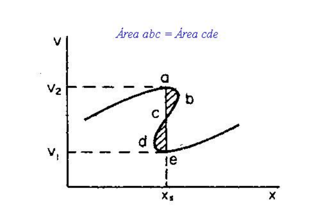
Cáustica



La familia de rayos reflejados por un espejo esférico tiene una envolvente. De acuerdo con la óptica geométrica, la intensidad de la luz es infinita en la envolvente.

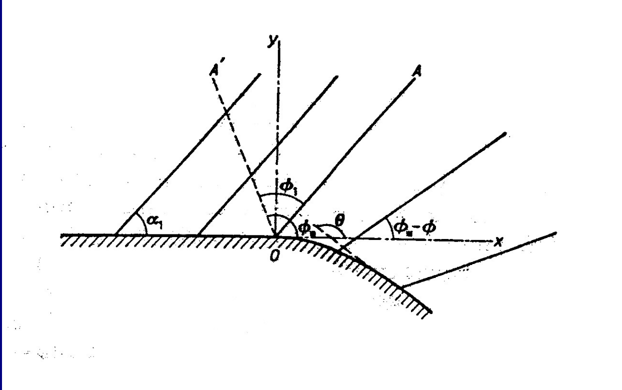
Perfil v contra x (tiempos largos)





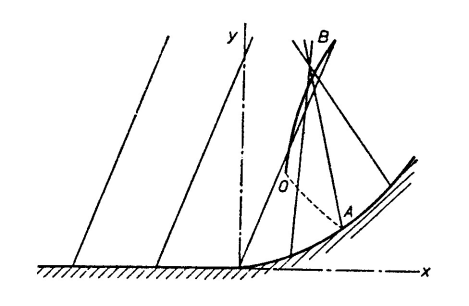
Para tiempos largos (en rojo) se obtiene una solución multivaluada.

Flujo a lo largo de un terreno convexo



El flujo a la izquierda de la característica OA es uniforme. A su derecha, es cada vez más rarificado. No se forma ondas de choque.

Flujo a lo largo de un terreno cóncavo



A lo largo de OB se forma un frente de choque. Por debajo de O se tiene un flujo regular con compresión creciente.